Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać, w jakich punktach jest różniczkowalna funkcja $f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=2x^2+2y^2+(x-1)^2+(y-1)^2$ na trójkącie domkniętym o wierzchołkach $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

3. Obliczyć masę półkuli wydrążonej o promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R, jeżeli gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

4. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_K (x+z)dx+(x+y)dy+(y+z)dz$, gdzie K jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach przebieganych w kolejności (2,0,0), (0,2,0), (0,0,2).

5. Rozwinąć w szereg samych cosinusów funkcję $f(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{2}-x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$. Czy szereg jest zbieżny punktowo do $f(x)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

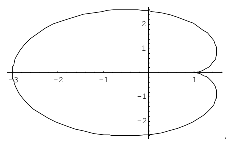
1. a) Wiedząc, że funkcja f ma drugie pochodne cząstkowe ciągłe znaleźć $\frac{\partial g}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}$ dla funkcji $g(x,y,z)=f(xy, x-z)$.

   b) Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ w punkcie (0,0).

2. Napisać równanie stycznej w punkcie (1,2) do wykresu funkcji $y = y(x)$ określonej równaniem $x^2y^3-y^2-4=0$. Obliczyć wartość y'' w tym punkcie.

3. Obliczyć całkę potrójną $\iiint_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+1}$, gdzie U jest obszarem ograniczonym sferami $x^2+y^2+z^2=1$ i $x^2+y^2+z^2=9$. Zastosować współrzędne sferyczne.

4. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

   $x(t) = 2\cos t-\cos 2t$, $y(t) = 2\sin t-\sin 2t$, $t\in[0,2\pi]$  .

5. Rozwinąć w szereg samych sinusów funkcję $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le\frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2}<x\le\pi \end{cases}$. Do jakiej funkcji jest zbieżny punktowo otrzymany szereg. Sporządzić rysunek.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Niech $f(x,y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$, gdzie g jest dowolną funkcją jednej zmiennej dwukrotnie różniczkowalną. Sprawdzić, że zachodzi równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr}$. (Uwaga: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.
3. Obliczyć masę kuli o promieniu *R*, której gęstość masy w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od ustalonej średnicy.
4. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int_K y\,ds$, gdzie *K* jest łukiem cykloidy $x(t)=t-\sin t$, $y(t)=1-\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$.
5. Rozwinąć w szereg samych sinusów funkcję $f(x)=e^x-1$, $x\in(0,\pi)$. Do jakiej funkcji jest zbieżny punktowo otrzymany szereg (sporządzić rysunek) .

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y(x)$ określonej równaniem $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4 = 0$.
2. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=x^2+y^2-xy+x+y$ w trójkącie ograniczonym przez proste : $x=0$, $y=0$, $x+y+3=0$.
3. Oblicz pole płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2+y^2=a^2$ ze sfery $x^2+y^2+z^2=r^2$ $0<a<r$.
4. Wykorzystując twierdzenie Greena obliczyć całkę $\oint_K (1-x^2)y\,dx + x(1+y^2)\,dy$, gdzie *K* jest okręgiem $x^2+y^2=R^2$ zorientowanym dodatnio. Sprawdzić wynik obliczając całkę bezpośrednio.
5. Znaleźć promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} z^{2n}}{n 4^n}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Zbadać ciągłość funkcji $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

   b) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=\operatorname{arctg} xy$ w punkcie (2,1) w kierunku wersora $(\frac{4}{5},\frac{-3}{5})$.
2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2-2xy+2y^2+2x+1=0$.
3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $y=x^2$, $z=0$, $x+y+z=2$. Sporządzić rysunek tej bryły.
4. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną $\int_K (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+1)\,dx+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})dy$, gdzie K jest gładkim łukiem o początku $A(-1,-1)$ i końcu $B(1,1)$ nie przechodzącym przez punkt (0,0).
5. Znaleźć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{2^n\sqrt{n}}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y,z)=x+y+2z$ jeżeli $x^2+y^2+z^2=1$.
2. Obliczyć pochodne $y'(x)$ i $y''(x)$ funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej wzorem $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=6-x^2-y^2$. Sporządzić rysunek tej bryły.
4. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną półsfery $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\le 0$.
5. Znaleźć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4^n}(x-2)^n$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Niech f będzie dowolną funkcją jednej zmiennej różniczkowalną na R. Pokazać, że funkcja $z(x,y)=y+f(x^2+y^2)$ spełnia równanie $-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x$.

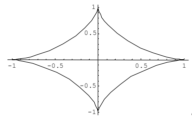
   b) Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\ln(\sqrt[3]{1{,}03}+\sqrt[4]{0{,}98}-1)$.
2. Znaleźć równanie stycznej do krzywej danej równaniem $\cos xy -x-2y=0$ w punkcie jej przecięcia z osią Ox.
3. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną $\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}$, gdzie obszar V jest ograniczony warunkami $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
4. Obliczyć całkę powierzchniową niezorientowaną $\iint_S (x^2+y^2+z^2)dS$, gdzie S jest płatem opisanym przez warunki $y^2+z^2=1$, $z\ge 0$, $0\le x\le 2$. Sporządzić rysunek tego płata.
5. Znaleźć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}(x-1)^n$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Sprawdzić z definicji, czy funkcja $f(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 y}$ ma pochodną kierunkową w punkcie $(x_0,y_0)=(1,1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   b) Wyznaczyć wersor $\boldsymbol{v}$ wskazujący kierunek w którym pochodna kierunkowa $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y) = \arcsin\frac{y}{x}$ jest równa 0.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x^2 + 9x - 6xy + y^3 - 12y$.
3. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć pole obszaru ograniczonego asteroidą $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$



.

4. .Korzystając z twierdzenia Gaussa obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\oiint\limits_S (x^2 + yz)dydz + (xz + y^2)dzdx + xy^2 dxdy$, gdzie S jest zewnętrzną stroną walca $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le 1$.
5. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)e^n}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^2 \frac{\cos x}{\sqrt{2-x}}dx$.
2. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=x^2y(2-x-y)$ na trójkącie domkniętym ograniczonym prostymi $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.
3. Obliczyć całkę krzywoliniową niezorientowaną $\int\limits_K (x+y)dl$ gdzie K jest ćwiartką okręgu $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x=y$ leżącą w pierwszym oktancie układu współrzędnych.
4. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, gdzie S jest wewnętrzną stroną półsfery $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \le 0$.
5. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(1-e)^n}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Funkcja $f(u,v)$ ma na R^2 ciągłe wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial g}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ funkcji $g(x,y)=x\,f(xy^2,x+y)$.

   b) Wyznaczyć wersor $\vec{v}$ wskazujący kierunek w którym pochodna kierunkowa $f'_{\vec{v}}(2,1)$ funkcji $f(x,y)=e^{x^2+3y}$ ma wartość 0.
2. Znaleźć ekstrema funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2e^y-y^4+1=0$.
3. Obliczyć masę bryły U ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2+z^2=8$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\geq 0$ jeżeli jej objętościowa gęstość masy wyraża się wzorem $\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$.
4. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)5^n}$.
5. Stosując twierdzenie Stokesa obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\oint_K (x-y)dx+(y-z)dy+(z-x)dz$,

   gdzie K jest brzegiem zorientowanym dodatnio względem dolnej strony stożka $z=\sqrt{x^2+y^2}-1$ odciętego płaszczyzną z=0.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Napisać wzór Taylora z resztą r_3 dla funkcji $f(x,y)=x\ln y$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,e)$.
2. Obliczyć $y''(0)$ dla funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x\,e^y-y+1=0$ i spełniającej warunek $y(0)=1$
3. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2+4z=0$ i $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$. Sporządzić rysunek tej bryły.
4. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$.
5. Stosując twierdzenie Stokesa obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\oint_K (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(x^2+y^2)dz$, gdzie K jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(1,1,1)$, przebieganą w kolejności $ABCA$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Niech $g(x,y)=f(xy,x^2+y^2)$, gdzie f ma ciągłe pochodne cząstkowe na R^2. Obliczyć $y\frac{\partial g}{\partial x}-x\frac{\partial g}{\partial y}$.

   b)Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=\frac{\arcsin y}{\arccos x}$ w punkcie $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ w kierunku wersora $[\frac{3}{5},\frac{4}{5}]$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$.
3. Obliczyć $\iiint\limits_U (x^2+y^2)dxdydz$, gdzie U jest bryłą ograniczoną powierzchniami $x^2+y^2-2z=0$, $z=2$. Sporządzić rysunek.
4. Wyznaczyć przedział zbieżności i sumę szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{4^n}(x-2)^n$.
5. Obliczyć całkę powierzchniową zorientowaną $\iint\limits_S xyz\,dxdy$, gdzie S jest częścią sfery $x^2+y^2+z^2=25$ położoną w I oktancie układu współrzędnych, zorientowaną na zewnątrz.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. a) Niech $g(x,y)=x^y$. Obliczyć $d^2g((4,1)$.
   b)Znaleźć równanie stycznej do krzywej $3x^2-2xy+xy^3=7$ w punkcie (1,2).
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2xz+2z^2+3y-1$.
3. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie obszar V jest określony nierównością $x^2+y^2+z^2\le z$, $x\ge 0$. Sporządzić rysunek.
4. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+6n+1}{2n^4+n+1}$. Sformułować wykorzystane kryterium .
5. Obliczyć całkę powierzchniową $\iint\limits_S xyz\,dS$, gdzie S jest powierzchnią $y^2=x$ odciętą płaszczyznami $z=0$, $z=4$, $y=1$, $y=2$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. W kierunku jakiego wersora $\vec{v}$ pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{x+y}$ w punkcie (0,1) przyjmuje wartość 0.
2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=12xy-5x$ w obszarze ograniczonym parabolą $y=(x-1)^2$ oraz prostymi $y=0$ i $x=-1$.
3. Znaleźć promień zbieżności, przedział zbieżności i sumę wewnątrz przedziału zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{5^n(n+1)}$
4. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie obszar V jest określony nierównością $x^2+y^2+z^2 \le z$, $x \ge 0$. Sporządzić rysunek.
5. Obliczyć masę płata S opisanego warunkami $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z \le 2$ o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x^5}}dx$.
2. Napisać równanie stycznej w punkcie (1,2) do wykresu funkcji $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2y^3-y^2-4=0$. Obliczyć wartość y'' w tym punkcie.
3. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$
4. Gęstość kuli o promieniu 1 w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od pewnego punktu (0,0,1). Obliczyć masę kuli
5. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{F}=(x,y,z)$ przez górną stronę powierzchni $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\arcsin x}}$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y,z) = 2\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{3n + \frac{1}{n}}}$. Podać odpowiednie kryteria zbieżności
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, z=6-x^2-y^2. Sporządzić rysunek tej bryły.
5. Obliczyć całkę krzywoliniową zorientowaną $\int_K (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$ gdzie K jest krzywą określoną równaniem $x=y^3$ od punktu $A(0,0)$ do $B(1,1)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

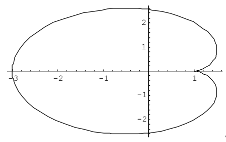
Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$.
2. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $xe^y-y+1=0$.
3. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)4^n}$
4. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=x^4+y^4$ na zbiorze $\{(x,y): x^2+y^2 \le 9\}$
5. Obliczyć masę części powierzchni paraboloidy obrotowej $x^2+y^2=2z$ odciętej płaszczyzną $z=2$ jeżeli gęstość powierzchniowa masy w danym punkcie paraboloidy jest równa kwadratowi odległości tego punktu od osi obrotu

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać, czy funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ jest ciągła w punkcie (0,0).Czy jest różniczkowalna w tym punkcie.
2. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{ne^n}$
3. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2-2xy+2y^2+2x+1=0$.
4. Korzystając z twierdzenia Greena obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą

   $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$, $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$, $t \in [0,2\pi]$.
5. Obliczyć pole płata wyciętego powierzchni $z=1-x^2-y^2$ przez płaszczyzny $z= -1$ i $z= -3$. Sporządzić rysunek.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3 \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{\sqrt{x^3}}$.
2. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=xy(6-x-y)$ na trójkącie domkniętym ograniczonym prostymi $x=0$, $y=0$, $x+y=10$.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \ln^2 n}$. Podać odpowiednie kryteria zbieżności
4. Wyznaczyć współrzędne środka masy jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z=\sqrt{x^2+y^2}-2$, $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2=4$. Sporządzić rysunek tej bryły. Zastosować współrzędne walcowe.
5. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=[e^z, e^{x+z}, e^{x+y}]$ przez górną stronę tej części walca parabolicznego $z=x^2$, która spełnia nierówność $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4+\ln x}} dx$.
2. Funkcja $g(r)$ ma ciągła pochodną na R . Niech $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$. Obliczyć $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ oraz sprawdzić, że

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{dg}{dr}\right)^2$$

3. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.
4. Obliczyć moment bezwładności względem początku układu współrzędnych dodatniego oktantu wydrążonej kuli o promieniu wewnętrznym 1 i zewnętrznym 2 jeżeli objętościowa gęstość masy w punkcie jest odwrotnie proporcjonalna do jego odległości od punktu (0,0,0) a masa bryły wynosi 4.
5. Obliczyć całkę powierzchniowa zorientowaną $\iint_S xyz\, dxdy$, gdzie S jest częścią sfery $x^2+y^2+z^2=25$ położoną w pierwszym oktancie układu współrzędnych, zorientowaną na zewnątrz.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć ekstrema warunkowe funkcji $f(x,y)=x+y$ przy warunku $g(x,y)=e^{x+y}-xy-1=0$.
2. W dostateczne małym otoczeniu punktu $(1,y_0)$ narysować wykres funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2 \ln y - y \ln x = 0$.
3. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.
4. Zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int_0^1 dx \int_{(x-1)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$. Narysować obszar całkowania.
5. Wyznaczyć moment bezwładności względem osi Ox jednorodnego płata $x^2+y^2+z^2=R^2$ gdzie $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$. Przyjąć, że płat ten ma masę m

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Wiedząc, że funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe znaleźć $\frac{\partial g}{\partial y}$ i $\frac{\partial^2 g}{\partial z \partial y}$ dla funkcji $g(x,y,z)=f(xy,x-z)$.

2. Uzasadnić , że równanie $y-\sqrt{y}\,e^{\frac{x}{y}}=0$ określa w otoczeniu punktu (0,1) funkcję uwikłaną $y=y(x)$. Napisać równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie (0,1)

3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$.

4. Obliczyć pole płata S wyciętego z powierzchni $z=1-x^2-y^2$ przez walec $x^2+y^2=2$. Sporządzić rysunek.

5. Obliczyć pracę w polu wektorowym $\vec{F}=(xy, y+z, z)$ podczas ruchu po łuku K: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$ od punktu $A(1,0,0)$ do punktu $B(-1,0,\pi)$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{1}{x^2y^2}$.
2. W dostatecznie małym otoczeniu punktu $(0,y_0)$ naszkicować wykres funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $xe^y-y^2\ln y=0$.
3. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)e^n}$
4. Gęstość kuli o promieniu 1 w każdym punkcie jest równa kwadratowi odległości tego punktu od pewnego ustalonego punktu leżącego na sferze ograniczającej tą kulę. Obliczyć masę kuli.
5. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=[\sqrt{xy},\sqrt{xy},z\sqrt{xy}]$ przez górną stronę płata $z=\sqrt{xy}$ dla $1\le x\le 4$ i $1\le y\le 4$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki $\int_0^1\frac{dx}{x^2+\sin x}$.
2. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+y$ w obszarze ograniczonym nierównościami $|x|+|y|\le 1$, $x\le 0$.
3. Znaleźć zbiór wszystkich $x\in\mathrm{R}$, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty}(x^2-3x+1)^n$ jest zbieżny. Wyznaczyć sumę $S(x)$ tego szeregu.
4. Obliczyć całkę $\iiint_U x^2\,|z|\,dxdydz$, gdzie U jest kulą $x^2+y^2+z^2\le R^2$.
5. Obliczyć strumień pola $\vec{F}=[x^3,y^3,z^2]$ przez zewnętrzną stronę powierzchni bocznej walca $x^2+y^2=9$ ograniczoną płaszczyznami $z=0$ i $z=2$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki $\int_1^2\frac{x+1}{\ln x\sqrt{x^3}}dx$.
2. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $z(x,y)$ zadanej równaniem $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.
3. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$
4. Obliczyć masę bryły zawartej między powierzchniami $x^2+y^2=1$, $z=x^2+(1+y)^2$ oraz $z=0$. Gęstość bryły w danym punkcie jest równa jego odległości od płaszczyzny Oxy.
5. Obliczyć całkę $\iint_S xyzdS$, gdzie S jest powierzchnią $y^2=x$ odciętą płaszczyznami $z=0$, $z=4$ i $x=1$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ i zbadać ich ciągłość w punkcie (0,0).
2. Obliczyć $y''(1)$ dla funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2+xy+y^2-2x-1=0$ oraz spełniającej warunek $y(1)=1$.
3. Znaleźć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\ln^2 n}$.
4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej $\int_0^1 dx \int_{-1}^{1-\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.
5. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednego zwoju linii śrubowej K: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $z=2t$ gdzie $t\in[0,2\pi]$ jeżeli liniowa gęstość masy wyraża się wzorem $\lambda(x,y,z)=z$. Uwaga: moment bezwładności punktu materialnego względem osi jest równy masie punktu pomnożonej przez kwadrat odległości tego punktu od osi.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$.
2. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $xe^y-y+1=0$.
3. Stosując odpowiednie twierdzenia o szeregach potęgowych obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)4^n}$
4. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną $\iiint_V\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, gdzie obszar V jest określony nierównością $x^2+y^2+z^2\le z$, $x\ge 0$. Sporządzić rysunek.
5. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{F}=(x,y,z)$ przez górną stronę powierzchni $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+2$.
2. W dostatecznie małym otoczeniu punktu (1,2) narysować wykres funkcji $y=y(x)$ określonej równaniem $x^2y^3-y^2-4=0$.
3. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+2}{4^n+3}(x+2)^n$.
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=16$, $z=6-x$, $z=1$.
5. Obliczyć masę płata S opisanego warunkami $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $z\le 2$ o gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y,z)=x^2+y^2$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć płaszczyznę styczną w punkcie $(-3,y_0,\frac{\pi}{4})$ do wykresy funkcji $z=\operatorname{arctg}(x^2+y)$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=3\ln\frac{x}{6}+2\ln y+\ln(12-x-y)$.
3. Korzystając ze współrzędnych sferycznych obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+2z^2}}$, gdzie obszar V jest określony warunkami $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.
4. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$
5. Obliczyć strumień pola wektorowego $\vec{F}(x,y,z)=(5x+z,\ x-3y,\ 4y-2z)$ przez górną część płaszczyzny $x+y+z=2$ odciętą płaszczyznami układu współrzędnych.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^3\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}}dx$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$.
3. Obliczyć masę jednorodnej bryły (gęstość $\rho(x,y,z)=1$) ograniczonej powierzchniami $z=2^{-(x^2+y^2)}-\frac{1}{2}$, $z=x^2+y^2-1$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.
4. Znaleźć przedział zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\ln^2 n}$
5. Obliczyć $\int\limits_K\frac{xdx+ydy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, gdzie K jest czwartą częścią elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ zawartą w pierwszej ćwiartce w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Czy całka zależy od postaci krzywej K?

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Znaleźć objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \sqrt{x} \ln x$; $1 \le x \le e$.
2. Wyznaczyć lokalne ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y) = y - \ln x$ przy warunku $g(x, y) = x^2 + (y-2)^2 - 2 = 0$.
3. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1$.
4. Obliczyć strumień pola $\vec{F} = [xy^2, x^2 y, z^3]$ przez powierzchnię bryły ograniczoną nierównościami $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \ln^n x$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Zbadać zbieżność całki niewłaściwej $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{2+x} dx$.
2. Obliczyć całkę podwójną $\iint_D 2x^2 y \, dxdy$, gdzie D jest obszarem ograniczonym osiami układu współrzędnych oraz krzywą $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.
3. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $z(x,y)$ zadanej równaniem $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$.
4. Obliczyć pole płata wyciętego z powierzchni $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$ przez walec $x^2 + y^2 = 2x$. Naszkicować rysunek.
5. Wyznaczyć przedział zbieżności i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} x^n$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$.
2. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=4$, $z=y+1$, $z=7$.
3. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y)=2x^2-y^2+12x$ na obszarze określonym nierównością $x^2+y^2\leq 16$.
4. Obliczyć masę powierzchni półsfery $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ o gęstości powierzchniowej $\sigma(x,y,z)=z$.
5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}(x+2)^n$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć zbiór tych liczb naturalnych k, dla których całka niewłaściwa $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$ jest zbieżna.
2. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2+4z=0$ i $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$. Sporządzić rysunek tej bryły.
3. Funkcję $y=y(x)$ zadano równaniem uwikłanym $x^4+\frac{4}{y^2}+\frac{4x^2}{y}=1$. Rozwinąć ją (o ile to możliwe) w otoczeniu punktu $x_0=-1$ w szereg Taylora do rzędu 2 (reszta z trzecią pochodną)
4. Sprawdzić, czy pole wektorowe $\vec{F}=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$ jest potencjalne, następnie obliczyć całkę $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
5. Wyznaczyć zbiór tych dodatnich wartości parametru a dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n+3^n}{2^n+5^n}$ jest rozbieżny.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. W otoczeniu punktu (0,1) naszkicować wykres funkcji uwikłanej $y=y(x)$ określonej równaniem $xe^y - y + 1 = 0$.
2. Obliczyć całkę potrójną $\iiint\limits_U y \sin \pi x \, dxdydz$ jeśli obszar całkowania U ograniczony jest powierzchniami $z = 1 - y^2$, $z = 0$, $x = -1$, $x = 1$.
3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(0,0,z_0)$ do powierzchni $z = x\cos(x+y^2)$.
4. Obliczyć masę półsfery $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ jeżeli gęstość powierzchniowa jest równa $\sigma(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
5. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

Egzamin z Analizy Matematycznej

Każde zadanie należy rozwiązać na oddzielnej, czytelnie podpisanej kartce!

1. Wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji $z(x,y) = xy(4-x-y)$ w trójkącie ograniczonym prostymi $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.
2. W dostatecznie małym otoczeniu punktu (1,2) narysować wykres funkcji $y = y(x)$ określonej równaniem $x^2y^3 - y^2 - 4 = 0$.
3. Obliczyć objętość bryły U ograniczonej płaszczyzną $z=0$, walcem $x^2+y^2=8x$ oraz stożkiem $x^2+y^2=4z^2$ $(z\geq 0)$. Sporządzić rysunek.
4. Obliczyć moment bezwładności paraboloidy $z=x^2+y^2$, $z\leq h$, o stałej gęstości powierzchniowej masy $\sigma(x,y,z) = \sigma_0$ względem osi Oz.
5. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}(x+2)^n$.